

# Theoretische Untersuchungen an einem Elektronenstrahlerzeuger mit Spitzenkathode

H. Rauh\* und D. Kern

Institut für Angewandte Physik der Universität Tübingen

Z. Naturforsch. **33a**, 910–913 (1978); eingegangen am 12. Mai 1978

*Theoretical Investigation of an Electron Gun with a Point Cathode*

Electron-optical properties of a gun with a point cathode are determined numerically by tracing a greater number of electron trajectories. In order to calculate the beam current density distribution, an attempt was made to describe the properties of the gun in terms of the parameters describing the initial conditions of the trajectories. Contrary to the conventional electron-optical imaging theory, the electron gun under consideration cannot be sufficiently characterized by a few aberration coefficients, since only a small fraction of the trajectories forming the electron beam would be covered by an expansion containing linear, third and fifth order terms, so that the series expansion method is not applicable.

## 1. Einleitung

Strahlerzeuger mit Spitzenkathode gewinnen zunehmend an Bedeutung. Von Interesse ist z. B. die Kenntnis von Lage und Durchmesser des engsten Bündelquerschnittes, Richtstrahlwert, Stromdichte- und Energieverteilung.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit einem Strahlerzeuger, der von Speidel und Gaukler [1] zur Energieanalyse emittierter Elektronen verwendet wurde. Er ist in Abb. 1 im Schnitt dargestellt.

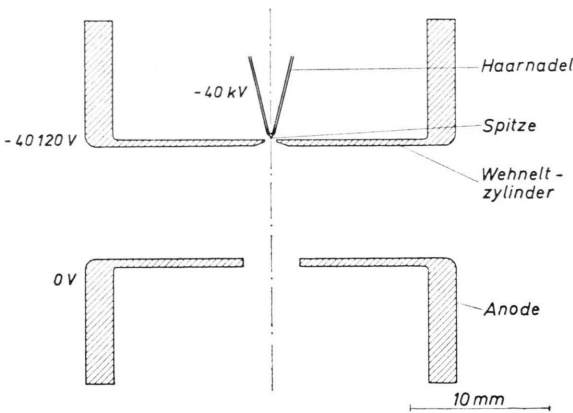


Abb. 1. Geometrische Anordnung des Strahlerzeugers.

stellt. Seine Elektroden sind – abgesehen von der Haarnadel – rotationssymmetrisch bezüglich der strichpunktirt gezeichneten Achse. Die aus der Kathodenspitze durch thermische Emission aus-

tretenden Elektronen werden zur Anode hin beschleunigt und verlaufen anschließend im feldfreien Raum. Während in einer früheren Arbeit [2] durch Berechnung einer kleineren Auswahl typischer Bahnen eine erste Vorstellung von der Gestalt des Elektronenbündels in diesem System gewonnen wurde, geht es jetzt um eine genauere quantitative Beschreibung elektronenoptischer Eigenschaften mittels einer größeren Anzahl von Bahnen. Insbesondere wird geprüft, inwieweit sich ein in der elektronenoptischen Abbildungstheorie erfolgreich angewendetes Verfahren zur quantitativen Charakterisierung des vorliegenden Strahlerzeugers, speziell zur Berechnung der Stromdichteverteilung in achsensenkrechten Bündelquerschnitten eignet.

## 2. Grundlagen

### 2.1. Feldberechnung

Betrachtet wird eine rotationssymmetrische Anordnung leitender Elektroden im Vakuum auf zeitlich konstanten Potentialen. Beschreibt man die Verteilung der Oberflächenladungen auf den Elektroden durch eine Dichtefunktion  $\sigma(\mathbf{r})$ , dann ist das (im Unendlichen auf Null normierte) Potential  $\Phi$  an einem beliebigen Ort  $\mathbf{r}_0$  durch

$$\Phi(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{F}} \frac{\sigma(\mathbf{r}) d\mathbf{f}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.1)$$

gegeben. Die Integration erstreckt sich dabei über die Oberflächen aller Elektroden. (2.1) wird als Integralgleichung zur Bestimmung von  $\sigma(\mathbf{r})$  aus den Elektrodenpotentialen aufgefaßt und approximativ gelöst [2].

\* Neue Anschrift: Fachbereich 5 der Universität Osnabrück, Albrechtstraße 28, D-4500 Osnabrück.

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. F. Lenz, Lehrstuhl für Theoretische Elektronenphysik, Universität Tübingen, Auf der Morgenstelle 10, D-7400 Tübingen.



Zur Spezialisierung auf rotationssymmetrische Felder führt man in (2.1) für  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}_0$  Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  bzw.  $r_0, \varphi_0, z_0$  ein und betrachtet  $r$  und  $z$  als stückweise stetige Funktionen des Bogenlängenparameters  $s$ . Dann läßt sich das Flächenintegral auf ein Linienintegral über die Konturen eines Meridionalschnittes der Elektrodenanordnung mit  $r \geq 0$  reduzieren. Man zerlegt nun das Parameterintervall des Integrationsweges in Teilintervalle  $\Delta s_k$  derart, daß die Ladungsdichte auf den zugehörigen Teilwegen näherungsweise durch jeweils konstante Werte  $\sigma_k$  ersetzt werden kann. Wählt man als Aufpunkte speziell die Mitten dieser Teilwege — dort ist das Potential voraussetzungsgemäß bekannt — dann geht (2.1) in ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der  $\sigma_k$  über, welche die Ladungsdichtefunktion approximieren.

Die Potentialberechnung im hier betrachteten Strahlerzeuger geht auf eine Näherung zurück, bei welcher das Integrationsintervall in 147 Teilintervalle  $\Delta s_k$  zerlegt wurde. Dabei entfielen 112 Teilintervalle auf die als Rotationskörper behandelte Spitzenkathode, 21 auf den Wehnelt-Zylinder und 14 auf die Anode. Die Länge der Teilwege wurde so bemessen, daß insbesondere der den Bahnverlauf entscheidend beeinflussende Feldbereich in der Umgebung der Spitze mit größtmöglicher Genauigkeit wiedergegeben wurde.

Die Feldstärkeverteilung wurde nach verschiedenen Methoden berechnet. Im sehr stark inhomogenen Feldbereich  $z_0 \leq 15 \mu\text{m}$  — die  $z_0$ -Achse ist so orientiert, daß der Ursprung im Scheitelpunkt der Spitze liegt und ihre positive Richtung zur Anode hin weist — wurde die (an Orten  $\mathbf{r}_0$  außerhalb der Elektrodenoberflächen gültige) Beziehung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_{\mathcal{F}} \frac{\sigma(\mathbf{r}) d\mathbf{f}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.2)$$

für die Feldstärke  $\mathbf{E}$  unter Verwendung der zuvor berechneten  $\sigma_k$  und Summation über  $k$  näherungsweise ausgewertet. Die so berechneten Feldstärkekomponenten sind stetige und stetig differenzierbare Funktionen des Ortes  $\mathbf{r}_0$ .

Zur Ermittlung der schwach inhomogenen Feldstärkeverteilung im Bereich  $15 \mu\text{m} \leq z_0 \leq 12 \text{ mm}$  und der für die Bahnberechnung relevanten Umgebung der Symmetrieachse wurde das Potential nach (2.1) in den Punkten eines quadratischen Maschennetzes variabler Maschenweite berechnet und abgespeichert. Die Feldstärkekomponenten

wurden anschließend aus diesen diskreten Potentialwerten durch numerische Interpolation und Differentiation gewonnen. Diese Methode erfordert zwar eine größere Speicherkapazität, verkürzte aber die Rechenzeit bei der Bahnbestimmung. Kontrollrechnungen unter Zugrundelegung von (2.2) zeigten, daß sich Unstetigkeiten der Feldstärkekomponenten beim Übergang von einer Masche zur anderen in diesem Feldbereich auf die Bahndaten nicht auswirkten.

Der Raum  $z_0 \geq 12 \text{ mm}$  ist praktisch feldfrei, so daß die Bahnen dort durch ihre Tangenten bei  $z_0 = 12 \text{ mm}$  ersetzt werden können.

## 2.2. Bahnberechnung

Die Elektronenbahnen wurden aus der nicht-relativistischen Bewegungsgleichung eines Elektrons der Ruhmasse  $m_0$  und der Ladung  $-e$  im elektrostatischen Feld

$$d^2\mathbf{r}_0/d\tau^2 = -\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \quad (2.3)$$

durch numerische Integration nach dem Verfahren von Runge-Kutta-Nyström berechnet. Dabei ist die unabhängige Variable  $\tau$  in (2.3) mit der Zeit  $t$  über  $d\tau = \sqrt{e/m_0} dt$  verknüpft. Als Anfangsschrittweite wurde  $\Delta\tau = 0,01$  gewählt. Die Bahnintegration wurde im Bereich  $z_0 \leq 12 \text{ mm}$  durchgeführt und erforderte ca. 1225 Integrationssschritte bei allen betrachteten Anfangsbedingungen.

## 3. Ergebnisse

Drei einparametrische Scharen von Meridionalbahnen wurden berechnet, wobei jeweils einer der drei Parameter  $\alpha, \vartheta, E_0$  variiert und die beiden anderen konstant gehalten wurden.  $\alpha$  beschreibt den Anfangspunkt,  $\vartheta$  die Anfangsrichtung auf der Spitzenoberfläche<sup>1</sup> und  $E_0$  die kinetische Anfangsenergie der emittierten Elektronen. Abbildung 2

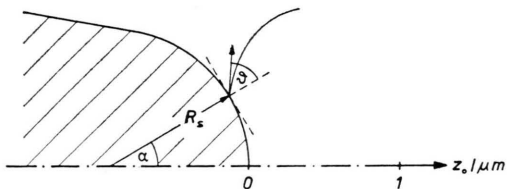


Abb. 2. Definition der Winkel  $\alpha$  und  $\vartheta$  zur Charakterisierung der Anfangspunkte und -richtungen auf der Spitze.

<sup>1</sup> Tatsächlich wurden unmittelbar vor der Spitzenoberfläche gelegene Anfangspunkte unter Berücksichtigung des dort herrschenden Potentials gewählt, da der Ausdruck (2.2) für die Feldstärke auf der Oberfläche selbst nicht anwendbar ist.

zeigt einen Halbschnitt durch den vorderen Teil der Spitze und definiert die Parameter  $\alpha$  und  $\vartheta$ .

Die erste Schar besteht aus Bahnen zu verschiedenen Werten von  $\alpha$  für  $\vartheta=0$  und  $E_0=0$ . Abbildung 3 zeigt den Achsenschnittpunkt  $z_a$

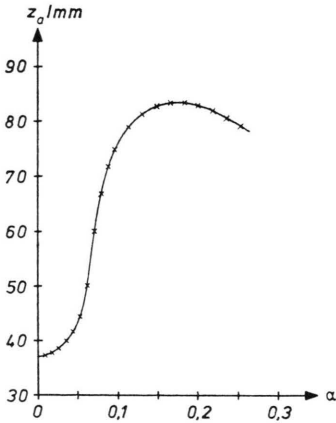


Abb. 3. Achsenschnittpunkt  $z_a$  als Funktion des Winkels  $\alpha$  für  $\vartheta=0$ ,  $E_0=0$ . (Berechnete Werte sind durch Kreuze markiert.)

dieser Bahnen hinter der Anode als Funktion des Winkels  $\alpha$ . Ausgehend von dem für  $\alpha \rightarrow 0$  extrapolierten Grenzwert  $z_1=36,8$  mm nimmt  $z_a$  mit  $\alpha$  zunächst zu, um nach einem Maximum  $z_2=83,4$  mm für  $\alpha=0,17$  wieder abzunehmen.

Die zweite Schar besteht aus Bahnen zu verschiedenen Werten von  $\vartheta$  für  $\alpha=0$  und  $E_0=0,1$  eV. Abbildung 4 zeigt die Abhängigkeit des Achsenabstandes  $r_0$  dieser Bahnen in der Ebene  $z_0=z_1=36,8$  mm vom Winkel  $\vartheta$ . Der Achsenabstand  $r_0$

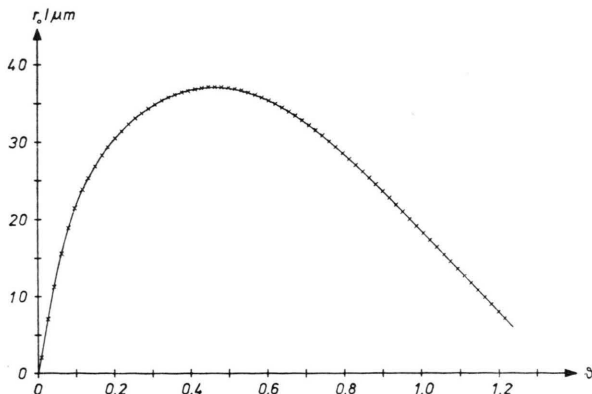


Abb. 4. Achsenabstand  $r_0$  in der Ebene  $z_0=z_1$  als Funktion des Winkels  $\vartheta$  für  $\alpha=0$ ,  $E_0=0,1$  eV. (Berechnete Werte sind durch Kreuze markiert.)

nimmt im Bereich kleiner Winkel  $\vartheta$  rasch zu, erreicht für  $\vartheta=0,46$  den Maximalwert  $r_{\max}=37,1$  mm und fällt dann für größere Winkel  $\vartheta$  langsam ab.

Die dritte Schar besteht aus Bahnen verschiedener Anfangsenergie  $E_0$  für  $\alpha=0,1$  und  $\vartheta=0$ .

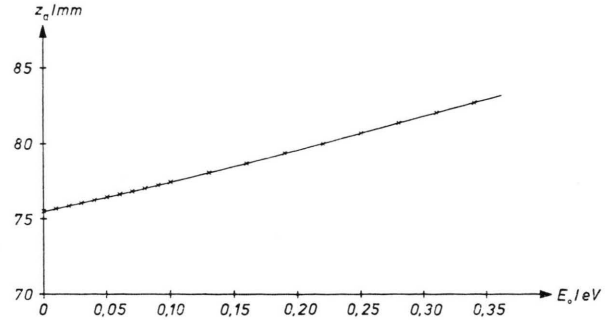


Abb. 5. Achsenschnittpunkt  $z_a$  als Funktion der kinetischen Anfangsenergie  $E_0$  für  $\alpha=0,1$ ,  $\vartheta=0$ . (Berechnete Werte sind durch Kreuze markiert.)

Abbildung 5 zeigt die nahezu lineare Abhängigkeit der Lage des Achsenschnittpunktes  $z_a$  als Funktion von  $E_0$ . Für  $E_0=0$  ergibt sich der Wert  $z_3=75,5$  mm.

Eine vollständige Beschreibung der Orts-, Richtungs- und Energieverteilung in einem achsenkrechten Bündelquerschnitt  $z_0=\text{const.}$  läge vor, wenn für jede Bahn die Koordinaten  $x_0=r_0 \cos \varphi_0$  und  $y_0=r_0 \sin \varphi_0$  in der Ebene  $z_0=\text{const.}$  und ihre Ableitungen  $x'_0$  und  $y'_0$  nach  $z_0$  sowie die Energie  $E$  in Abhängigkeit von den fünf Parametern  $x_s=r_s \cos \varphi_s$ ,  $y_s=r_s \sin \varphi_s$ ,  $x'_s$ ,  $y'_s$  und  $E_0$

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(x_s, y_s, x'_s, y'_s, E_0), \\ y_0 &= y_0(x_s, y_s, x'_s, y'_s, E_0), \\ x'_0 &= x'_0(x_s, y_s, x'_s, y'_s, E_0), \\ y'_0 &= y'_0(x_s, y_s, x'_s, y'_s, E_0), \\ E &= E(x_s, y_s, x'_s, y'_s, E_0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

bekannt wären, welche den Emissionsort  $(x_s, y_s)$ , die Anfangsrichtung  $(x'_s, y'_s)$  und die Anfangsenergie  $E_0$  der Bahn kennzeichnen, und wenn ferner die von der Feldstärke an der Kathodenoberfläche und der Kathodentemperatur abhängige Orts-, Richtungs- und Energieverteilung

$$F_s(x_s, y_s, x'_s, y'_s, E_0) dx_s dy_s dx'_s dy'_s dE_0$$

der Elektronenemission an der Kathodenoberfläche bekannt wäre. Die Umrechnung auf die gesuchte Verteilung

$$F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, E) dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0 dE$$

erfolgt dann durch Berechnung der Funktionaldeterminante der Transformation (3.1) (Glaser [3], Lenz [4]). Diese wird dann besonders einfach, wenn die Transformationsgleichungen (3.1) die Gestalt von Potenzreihenentwicklungen annehmen, die man nach wenigen Gliedern abbrechen kann, ohne einen großen Fehler zu machen. Die paraxiale Näherung in der Elektronenoptik besteht in einem Abbrechen nach den in  $x_s, y_s, x'_s, y'_s$  linearen Gliedern, während die Bildfehlertheorie 3. Ordnung Glieder bis zur 3. Ordnung in diesen Parametern berücksichtigt.

Die vorliegenden Rechnungen liefern nur einen geringen Bruchteil der in den Transformationsgleichungen (3.1) enthaltenen Information. Zunächst wurden nur Meridionalbahnen berechnet, d.h. anstelle der fünf Parameter  $x_s, y_s, x'_s, y'_s, E_0$  wurden nur drei variiert, nämlich  $r_s = R_s \sin \alpha = \sqrt{x_s^2 + y_s^2} \sin \alpha$ ,  $r'_s = \tan(\alpha + \vartheta)$  und  $E_0$ , so daß statt (3.1) bestenfalls die Beziehungen

$$\begin{aligned} r_0 &= r_0(\alpha, \vartheta, E_0), \\ r'_0 &= r'_0(\alpha, \vartheta, E_0), \\ E &= E(\alpha, \vartheta, E_0) = E_0 + e\Phi(z_0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

aus den Rechnungen entnommen werden konnten. Da aber auch nur jeweils einer der drei Parameter  $\alpha$ ,  $\vartheta$  und  $E_0$  variiert und die beiden anderen konstant gehalten wurden, liefern die Rechenergebnisse nur sehr wenige der vielen für eine vollständige Beschreibung der Verteilungsfunktion

$$F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, E)$$

benötigten Koeffizienten. Dennoch genügen sie für den Schluß, daß Reihenentwicklungen mit einer überschaubaren Anzahl von Gliedern zur Beschreibung der Transformation (3.1) nicht möglich sind, da sie schon für die viel einfachere Transformation (3.2) versagen. Sowohl die in Abb. 3 dargestellte Funktion

$$z_a(\alpha) = z_0 - r_0(\alpha, 0, 0)/r'_0(\alpha, 0, 0)$$

als auch die in Abb. 4 dargestellte

$$r_0(\vartheta) = r_0(0; \vartheta; 0, 1 \text{ eV})$$

lassen sich nämlich nicht in dem gesamten praktisch

interessierenden Wertebereich durch Reihenentwicklungen mit wenigen Termen befriedigend approximieren. Entwicklungen der geraden Funktion  $z_a(\alpha)$  bis zur Ordnung  $\alpha^6$  und der ungeraden Funktion  $r_0(\vartheta)$  bis zur Ordnung  $\vartheta^5$  geben den Verlauf der Funktionen nur für sehr kleine Anfangsbereiche der Kurven gut wieder, nämlich diejenigen für Orte nahe dem Scheitelpunkt der Spitze bzw. Richtungen, die nur geringfügig von der Richtung der Oberflächennormalen abweichen. Im Gegensatz zu elektronenoptischen Abbildungselementen genügen wenige Fehlerkoeffizienten zur ausreichenden Charakterisierung des betrachteten Systems unter den vorgegebenen Betriebsbedingungen also nicht, da auch aufgrund experimenteller Untersuchungen [1] bekannt ist, daß Elektronen zum Strahlstrom beitragen, die sowohl in entfernteren Punkten der Spitze als auch unter großen Winkeln gegen die Oberflächennormale emittiert werden. Selbst durch Berücksichtigung von etwa 5–10 Termen in den Reihenentwicklungen wurden die Bereiche guter Approximation nicht wesentlich erweitert. Die in der Abbildungstheorie angewendete Methode der Reihenentwicklung ist also zur Berechnung der Orts- und Richtungsverteilung der Elektronen und somit zur Berechnung der Stromdichteverteilung wenig geeignet.

Ein grundlegend anderes Verfahren besteht darin, daß man zu verschiedenen Anfangsbedingungen eine große Anzahl (z. B. einige tausend) von Elektronenbahnen berechnet und die Dichteverteilung ihrer Durchstoßpunkte und -richtungen in der Referenzebene ermittelt. Durch Gewichtung mit der Verteilungsfunktion  $F_s(x_s, y_s, x'_s, y'_s, E_0)$  erhält man hieraus die Orts- und Richtungsverteilung der Elektronen. Solche Rechnungen wurden kürzlich von Hauke [5] für Strahlerzeuger mit thermisch emittierender ebener bzw. Spitzenkathode, von Kern [6] für ein System mit Feldemissionsspitze durchgeführt.

Wir danken Herrn Prof. Dr. F. Lenz für seine fördernde Unterstützung dieser Arbeit. Dem Regionalen Rechenzentrum Stuttgart und dem Zentrum für Datenverarbeitung der Universität Tübingen sind wir für die Überlassung von Rechenzeit zu Dank verpflichtet.

- [1] R. Speidel u. K. H. Gaukler, Z. Phys. **208**, 419 (1968).
- [2] H. Rauh, Z. Naturforsch. **26a**, 1667 (1971).
- [3] W. Glaser, Grundlagen der Elektronenoptik, Springer-Verlag, Wien 1952, S. 440ff.

- [4] F. Lenz, Habilitationsschrift, Technische Hochschule Aachen 1957.
- [5] R. Hauke, Dissertation, Universität Tübingen 1977.
- [6] D. Kern, Dissertation, Universität Tübingen 1978.